864. bicompact space ノ次元ニ就テ

森田　紀一（東京文理大）

先頃 A. Weil ノ uniform space ヲ讀ンデ bicompact Hausdorff space ノ次元ガ Kompaktum ノ場合ト同様ニ論ゼラレルコトヲ知リマシタ。最近 bicompact space ノ次元ガ話題ニ上リマシタカラ[1], ソレヲ述ベテミタイト思ヒマス。

§1. normaler Hausdorffscher Raum R ヲ考ヘル。

Lemma 1. $\mathfrak{G}=\{G_1,\cdots\cdots,G_s\}$ ヲ R ノ有限開被覆族トスルトキ, R カラ $\mathfrak{G}$ ノ Nerv (之ヲ多面体ト考ヘル) ノ中ヘ $\mathfrak{G}$-abbildung ガ存在スル。閉被覆族ニ就テモ同様デアル。

証明: R ガ normaler Raum デアルカラ

$$\mathfrak{F}=\{F_1,\cdots\cdots,F_s\};\quad F_i\subset G_i,\quad i=1,\cdots\cdots,s$$

ナル $\mathfrak{G}$ ト ähnlich ナ閉被覆族 $\mathfrak{F}$ ガ存在スル。ソコデ $F_i\cap R-G_i=0$ ヨリ F_i デハ 1, $R-G_i$ デハ 0, ソノ他デハ $0\leqq f_i(x)\leqq 1$ ナル R 全体デ定義サレタ連続函数 $f_i(x)$ ガ存在スル。

$$U_i=\mathop{E}_{x}\{x;\ f_i(x)>0\}\ \text{トオケバ,}$$

$$F_i\subset U_i\subset G_i.$$

デアルカラ開被覆族 $\mathfrak{U}=\{U_1,\cdots\cdots,U_s\}$ ハ $\mathfrak{G}$ ト ähnlich デアル。コノ $\mathfrak{U}$ ト $f_i(x)$ トヲ使ッテ Kuratowski 写像ヲ作レバ ($\mathfrak{U}$ ノ Nerv ノ Euklidische Reali-

---

1) N. Vedenissoff, Généralisation de quelques théorémes sur la dimension, Comp. Math. 7.

sation K ニ於テ U_i ニ對應スル頂点ヲ b_i トスレバ R ノ点 x ニハ各頂点 b_i ニ mass $f_i(x)$ ヲオイタ時ノ重心ヲ對應サセル）之ガ求ムル $\mathfrak{G}$-abbildung デアル。開被覆族 $\mathfrak{F}$ ガ與ヘラレタトキハ，逆ニ開被覆族 $\mathfrak{G}$ ヲ作ッテ同様ニヤレバヨイ。

次ニ R ノ次元ヲ Pontrjagin ニ從ッテ次ノ如ク定義スル。

定義 1. 次ノ條件ガ満足サレルトキ、R ノ次元ハ r デアルト云フ： $\dim R = r$.

(a) 任意ノ R ノ有限開被覆族 $\mathfrak{G}$ ヲトルトキ, $\mathfrak{F} \Subset \mathfrak{G}$ 且ッ $m(\mathfrak{F}) \leqq r+1$[2] ナル有限開被覆族 $\mathfrak{F}$ ガ存在スル。

(b) $\mathfrak{F} \Subset \mathfrak{G}$ ナル任意ノ有限開被覆族 $\mathfrak{F}$ ヲトレバ，必ズ $m(\mathfrak{F}) > r$ ナル如キ有限開被覆族 $\mathfrak{G}$ ガ存在スル。

然ラバ Lemma I ニヨリ N. Vedenissoff ノ定理[3] ハ kompakter normaler Raum ニ就テ成立スル。即チ（parfaitement ノ假定ハ不必要）

定理 1. kompakter normaler Raum R ノ次元ハ、任意ノ有限開被覆族 $\mathfrak{G}$ ニ對シ，常ニ n 次元ノ Polyeder ノ中ヘノ（上ヘノ）$\mathfrak{G}$-abbildung ガ存在スル如キ整數 n ノ中最小ノモノデアル。

---

2) $\mathfrak{F}$ ノ一ッノ要素ヲトレバ必ズ之レヲ含ム $\mathfrak{G}$ ノ要素ガ少クモ一ッ存在スルトキ $\mathfrak{F} \Subset \mathfrak{G}$ トカク。$m(\mathfrak{F})$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ ordnung ヲ示ス。

3) 前出 1) ノ論文 Théorème I

§2. Rが特ニ bikompakter Hausdorffscher Raum ノ場合ヲ考ヘル。

然ラバコノ時ハ A. Weil[4]ニヨレバ R ハ espace uniforme ト考ヘラレル. ソノ structure uniforme ヲ與ヘル $R\times R$ ニ於ケル Δ ノ entourage ノ famille ヲ V_α トスル。

定義2. R ノ被覆族 $\mathfrak{F}=\{F_1,\cdots\cdots,F_s\}$ が $F_i\times F_i\subset V_\alpha$ $(i=1,\cdots\cdots,s)$ ヲ満足スルトキ, V_α－被覆族ト云フ。

R カラ R′ ヘノ連続寫像 f が R′ ニ於ケル Bild ノ各点 p ニツキ、$f^{-1}(p)\times f^{-1}(p)\subset V_\alpha$ ヲ満足スルトキ, f ヲ V_α－abbildung ト云フ。

定義3. Rが次ノ條件ヲ満足スルトキ, $\overline{\dim}\,R=r$ トカク。

(a) 任意ノ V_α ヲトルトキ $m(\mathfrak{F})\leqq r+1$ ナル有限開 V_α－被覆族 $\mathfrak{F}$ がアル。

(b) 有限開 V_α－被覆族 $\mathfrak{F}$ ヲトレトビ必ズ $m(\mathfrak{F})>r$ ナル如キ V_α が存在スル

Lemma 2. $\dim R=\overline{\dim}\,R$ （但シ定義1或ハ3ニ於テ共処ニ述ベラレタル如キ r が存在シナイトキハ $\dim R$ 或ハ $\overline{\dim}\,R$ ハ ∞ トスル）

証明: $\dim R=r$ トスルト定義3ノ(a)が成立ス

4) A Weil, Sur les espaces a structure uniforme

ルコトハPontrjagin ト同様[5]、(b) ヲ云フニハ $\gamma \geq S$ ナレ

有限ノ S ヲトルトキ 任意ノ V_α ー被覆族ノ Ordnung ガ

必ズ S ヨリ大ナル如キ V_α ノ存在ヲ云ヘバヨイ。

ソレニハ 定義1 (b) ニテイヘル $\mathfrak{V}$ ヲトル。

コノ被覆族 $\mathfrak{V}$ ニ対シテハ、R ノ各点 p ニ $V_\alpha(p)$ ヲ對應サセテ出來ル被覆族 $\{V_\alpha(p)\}$ ガ $\{V_\alpha(p)\} \Subset \mathfrak{V}$ デアル如キ V_α ガ存在スル。[6] コノ V_α ガ我々ノ目的ニ適スル。

Lemma 2 ニヨリ、Kompaktum ノ場合ノ ε- Überdeckung ノ代リニ V_α - Überdeckung, ε- abbildung ノ代リニハ V_α - abbildung ヲ使ヘバ、Kompaktum ノ場合ノ analogy ガキク。例ヘバ R 以外ニ bicompact uniform space R′ ヲ考ヘ、ソノ uniform structure ヲ與ヘル family ヲ V'_β デ表ハセバ、次ノ事ガ成立スル。

Lemma 3. R カラ R′ ヘノ V_α - abbildung f ガ與ヘラレタ時、

$M' \times M' \subset V'_\beta$ ナル限リ $f^{-1}(M') \times f^{-1}(M') \subset V_\alpha$ ナル如キ V'_β ガ存在スル。

証明. f ハ $R \times R$ カラ $R' \times R'$ ヘノ連続写像ニ拡張出來ル。[7]

---

5) L. Pontrjagin, Topological groups.

6) 前出 4) ノ書物ノ Théorème VI, P. 24.

7) $(p, q) \in R \times R$ ナラバ $f(p, q) = (f(p), f(q)) \in R' \times R'$

然ラバコノ寫像ヲ同ジク f デ表ハセバ f ガ V_α-abbildung ナルコトヨリ

$$f^{-1}(\Delta')\subset V_\alpha$$

處デ $\Delta'=\bigcap V'_\beta=\bigcap \overline{V}'_\beta$ （$\overline{V}'_\beta$ ハ V'_β ノ閉苞）

$$\therefore\ f^{-1}(\Delta')=\bigcap_\beta f^{-1}(\overline{V}'_\beta)\subset V_\alpha$$

而シテ $f^{-1}(\overline{V}'_\beta)$ ハ $R\times R$ ニ於ケル閉集合、V_α ハ $R\times R$ ニ於ケル開集合トミテヨイカラ Bikompaktheit ヨリ既ニ有限個ノ $f^{-1}(\overline{V}'_\beta)$ ノ共通部分ガ V_α ニ含マレル。

$$\bigcap_{i=1,\cdots,n} f^{-1}(\overline{V}'_{\beta_i})\subset V_\alpha$$

ソコデ $V'_\beta\subset\bigcap_{i=1,\cdots,n} V'_{\beta_i}$ ナル V'_β ヲトレバ，コノ V'_β ハ Lemma 3 ノ條件ヲミタス．從ッテ次ノ定理ガ成立スル。

— 以上 —

定理 2. n 次元ノ R ニ對シテハ、次ノ如キ V_α ガ存在スル．即チ V_α-abbildung デハ R カラ，R ヨリ低次元ノ空間ヘウツルコトハ不可能デアル。

更ニ

定理 3. R ノ次元ハ，R ガ n 次元ノ Vollkugel ノ上ヘ wesentlich = abbilden サレ得ル如キ整數 n ノ中最大ノモノデアル。

ガ成立スル。

ソレニハ黄表紙[8)] ノ 3/3 頁ノ始メノ部分ヲ少シ変更スル。即チ定理 2 ニ云フ V_α ヲトリ，R ヲ V_α-abbildung

デ r 次元ノ多面体 P ヘウツシ，コノ寫像カラ定マル Lemma 3 ニ云フ V'_β ヲトレバ，今ノ場合 R' ハ Kompaktum デアルカラ，V'_β ハ正数 ε デ表示サレル。コノ ε デ P ヲ細分シテユケバヨイ。

$n > r$ ナル n ノトルトキ n 次元ノ Vollkugel ヘノ wesentliche Abbildung ノ存在セザルコトヲ云フニハ，R カラゆうくりっど R^n ヘノ連続寫像 f ニ對シテ，$\varepsilon > 0$ ト V_α トヲ任意ニ與ヘテ

$$\rho[f(x), \varphi(x)] < \varepsilon, \qquad x \in R$$

ガ成立スル如キ R カラ R^n ヘノ V_α-Abbildung φ ノ存在ヲ云ヘバヨイ。

トコロデ黄表紙 367 頁ノ δ ノ役目ヲスル V_α ノ存在ハ知ラレテキルカラ、Lemma 1 ヲ利用シテソコノ証明ガソノマヽ適用出来ル。

更ニ又 Menger-Nobelingscher Einbettungssatz ニ analogous ニ

定理 4. $\dim R = r$ ナラバ，可附番個ノ V_{α_i} ($i = 1, \cdots \cdots, n, \cdots\cdots$) ヲ與ヘタトキ，スベテノ V_{α_i} ニ対シテ同時ニ V_{α_i}-Abbildung トナル如キ R カラ R^{2r+1} ヘノ連続寫像 f ガアル。

ガ成立スル。(勿論 Einbettungssatz ハソノマヽノ成立ハ望ミ得ナイ。例ヘバ 0-次元ノ bicompact space ノ任意濃度ノ個数ノ topological product ハ又 0-次元

前頁脚註 8) Alexandroff-Hopf ノ Topologie I.

デアルカラ）

§3. 次ニ ε-Kette ノ代リニ V_α-Kette ヲ考ヘルコトガ出来ル。即チ $a_1, \ldots\ldots, a_s$ ガ $(a_i, a_{i+1}) \subset V_\alpha$ ヲ満足スルトキ之ヲ V_α-Kette ト称スル。

然ラバ一点 p ノ V_α-Komponent $K_\alpha(p)$ モ 0-Komponent $K_0(p)$ ［或ハ Δ-Komponent トイフベキカモ知レマセン］モ同様ニ定義サレル。

R ハ勿論 bikompakter Raum トスル. 然ラバ部分閉集合 F_1, F_2 ガ共通点ヲモタネバ $V_\alpha(F_1) \frown F_2 = 0$ ナル V_α ガ存在スル. 之ハ Kompaktum ノ場合ノ $\rho(F_1, F_2) = \sigma > 0$ ニ相当スル, 従ツテ p ノ Komponent ヲ $K(p)$ トオク時

$$K(p) = K_0(p) = \bigcap_\alpha K_\alpha(p)$$

ガ同様ニ現在ノ場合ニ成立スル。

今一点 p ヲ含ム開集合デ同時ニ閉集合ナル T ヲトルト必ズ $K(p) \subset T$.

従ツテ $K_\alpha(p)$ ガ同時ニ開且ツ閉ナル集合トル故

定理5. bikompakter Hausdorffscher Raum ノ一点 p ノ Komponent ハ, p ヲ含ミ且ツ同時ニ開且ツ閉ナル集合スベテノ共通部分デアル。

又,

定理6. R ガ 0.次元ナルコトト totally disconnected ナルコトトハ同値デアル。但シ R ハ

bikompakt.